

Метод хорд

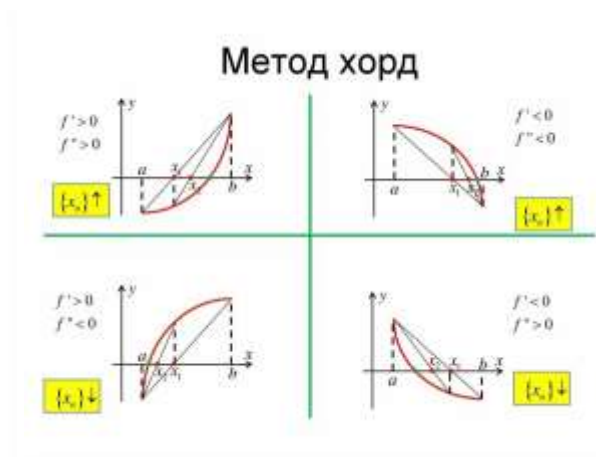
Метод хорд — итерационный численный метод приближённого нахождения корня уравнения. Применяется для нелинейных уравнений.

Также метод называют методом ложного положения.

Принцип

Функция $f(x)$ на каждом шаге поиска заменяется хордой, пересечение которой с осью абсцисс даёт приближение корня. При этом в процессе поиска семейство хорд может строиться:

- при фиксированном левом конце хорд ($z = a$), тогда начальная точка $x_0 = b$;
- при фиксированном правом конце хорд ($z = b$), тогда начальная точка $x_0 = a$.



Метод требует, чтобы один конец отрезка, на котором ищется корень, был неподвижен. В качестве неподвижного конца выбирают тот конец отрезка, для которого знак $f(x)$ совпадает со знаком второй производной $f''(x)$.

Алгоритм

Некоторые этапы алгоритма решения уравнения методом хорд:

- Вычисляются значения функции $f(x)$ на концах отрезка в точках a и b ($f(a)$ и $f(b)$).
- Составляется уравнение хорды, которая представляет собой прямую $y(x)$, проходящую через эти две точки.
- С помощью хорды на отрезке $[a, b]$ выбирается точка x_c , в которой $y(x_c) = 0$.
- Точка x_c делит отрезок $[a, b]$ на две части. Из двух частей выбирается та, на краях которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки.
- Процесс повторяется многократно и может быть остановлен по условию, например, $|x_c - x_{c-1}| < \varepsilon$, где ε — заданная погрешность.

Реализация метода хорд в программе требует определения начального приближения корня, функции, которую необходимо решить, и параметров, связанных с сходимостью и точностью вычислений. Алгоритм ограничен числом итераций или некоторым другим критерием остановки.

Сходимость

Метод хорд обладает линейной скоростью сходимости. Однако у метода есть и ограничения:

- Неустойчивость — в некоторых случаях метод может сходиться медленно или вообще расходиться, если выбраны неправильные начальные значения аргумента.
- Ограниченность области сходимости — метод хорд может ограничиться только определённой областью, в которой функция представляет себя в виде непрерывной и монотонной кривой.

- Неэффективность в сложных случаях — в некоторых случаях, особенно при наличии множества корней или нелокальных минимумов и максимумов, метод хорд может быть неэффективным.

Применение

Метод хорд широко применяется в различных областях, где требуется приближённое нахождение корней уравнений. Например:

- Решение уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ на интервале $[0, 2]$ с точностью 0,001 — корень 1,0001.
- Решение уравнения $\sin(x) - x = 0$ на интервале $[0, 2]$ с точностью 0,0001 — корень 0,8767.
- Решение уравнения $e^x - 2x = 0$ на интервале $[-1, 1]$ с точностью 0,00001 — корень 0,85288.

Важно: метод хорд может расходиться или сходиться к другому корню, если на заданном интервале уравнение имеет несколько корней